Test de hipótesis de la varianza poblacional

Hemos estudiado cómo realizar pruebas de hipótesis para la media poblacional y diferencias entre medias usando el valor-p y el método del valor crítico. Para testar hipótesis sobre la varianza poblacional utilizamos un procedimiento similar. Al igual que para la media poblacional, existen tres tipos específicos de pruebas de hipótesis que podemos realizar para la varianza poblacional:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \qquad H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_2^2 \qquad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \qquad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

Para calcular el estadístico de prueba se usa la varianza muestral s^2 y el valor hipotético de varianza poblacional σ_0^2. Si la población se distribuye normal, usamos el siguiente estadístico de prueba:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Siendo χ^2 donde se tiene una distribución chi-cuadrada con n-1 grados de libertad.

Ejemplo

La empresa Metro S.A. quiere mejorar la puntualidad de sus conductores en los horarios de llegada a las estaciones. En otras palabras, quieren que haya poca variabilidad en los tiempos de llegada. Específicamente, creen que hoy la varianza es mayor a cuatro minutos, pero se han puesto como meta que la varianza sea de cuatro minutos o menos. Como siempre, el primer paso es formular las hipótesis.

$$H_0: \sigma^2 \leq 4$$

$$H_1: \sigma^2 > 4$$

Si H_0 es verdadera, entonces la varianza poblacional se encuentra dentro de los estándares de calidad que quiere entregar Metro. Si H_0 es falsa, entonces no se cumple la meta del Metro quiere y por ende habría que tomar medidas para disminuir a varianza poblacional de los tiempos de llegada.

Suponiendo que tenemos una muestra aleatoria de 24 llegadas a una estación combinación, donde la varianza muestral fue $s^2 = 4.9$ y la población de los tiempos de llegada se distribuye aproximadamente normal, nuestro estadístico de prueba sería el siguiente:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(23-1)4.9}{4} = 28.18$$

Este valor de prueba de 28.18 se ubica a la izquierda del valor crítico de 35.172 (que obtenemos de la tabla de distribución chi-cuadrado para 23 grados de libertad y un nivel de significancia del 5%). La regla de decisión en este caso sería Rechazar la hipótesis nula si $\chi^2 \geq 35.172$, por lo tanto, concluimos que no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula y no podemos concluir que la varianza en los tiempos de llegada a las estaciones sea superior a cuatro minutos.

Área en la cola superior	0.10	0.05	0.025	0.01
Valor χ^2 (23 *gl*)	32.007	35.172	38.076	41.638

$\chi^2 = 28.18$

Si quisiéramos ocupar el método del valor-p, podemos ver en la primera fila de la tabla que este es mayor que 0.10. Como un valor-p de 0.10 ya es mayor que un $\alpha = 0.05$, llegamos a la misma conclusión de que no se puede rechazar la hipótesis nula. Dado que con este método del valor-p puede ser difícil encontrar un valor exacto en la tabla, es muy útil usar algún software estadístico para encontrar un valor-p preciso, dado el estadístico de prueba.

En este ejemplo realizamos una prueba de hipótesis para la varianza poblacional de una cola. Ahora ustedes realizarán un ejercicio para una prueba de dos colas.

Ejercicio 1

Las oficinas que otorgan las licencias de conducir tienen información histórica de los puntajes de los exámenes para obtener la licencia que muestran que la varianza es de $\sigma^2 = 100$. Durante los últimos meses se han introducido modificaciones al examen y se quiere mantener la varianza histórica de los puntajes. Suponga que tiene una muestra de 30 solicitantes de licencia de conducir con una varianza muestral de 162 y un nivel de significancia del 5%. Plantee y resuelva el ejercicio.

Tabla resumen de la varianza poblacional

	Prueba de la cola inferior	Prueba de la cola superior	Prueba de dos colas
Hipótesis	$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
Estadístico de prueba	$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$
Regla de rechazo: método del valor-*p*	Rechazar H_0 si valor-$p \leq \alpha$	Rechazar H_0 si valor-$p \leq \alpha$	Rechazar H_0 si valor-$p \leq \alpha$
Regla de rechazo: método del valor crítico	Rechazar H_0 si $\chi^2 \leq \chi^2_{(1-\alpha)}$	Rechazar H_0 si $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha}$	Rechazar H_0 si $\chi^2 \leq \chi^2_{(1-\alpha/2)}$ o si $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}$

Fuente: Anderson, Sweeney & Williams (2008)

Diseño de experimentos y análisis de varianza (ANOVA)

En este curso hemos estudiado cómo podemos inferir conclusiones respecto a una población a partir de datos de una muestra. En esta clase introduciremos un procedimiento inferencial que es habitualmente utilizado en los experimentos. Este procedimiento es conocido como análisis de varianza o ANOVA (por sus siglas en inglés *analysis of variance*).

Revisemos un ejemplo simple donde queremos probar la efectividad de un factor (pueden existir experimentos más complejos con múltiples factores. Supongamos que una planta de tratamientos de aguas compra partes para armar filtros a distintos proveedores y los arma en su sede de ensamblaje utilizando de forma aleatoria tres métodos distintos. Esta planta les pide a ustedes que los ayuden a escoger el método de ensamblaje que permite armar más filtros por semana. Aquí tenemos dos variables esenciales:

1. Tratamiento o variable independiente: método para armar los filtros.
2. Resultado o variable dependiente: el número de sistemas de filtración armados por semana.

En este experimento tenemos tres poblaciones y cada una ocupó un método distinto para armar el filtro. El objetivo estadístico es determinar si el promedio producido por semana es el mismo en los tres métodos. Usaremos una muestra aleatoria de tres trabajadores, conocidos como unidades experimentales. A cada uno se le asigna de forma aleatoria un método distinto. La aleatorización es fundamental en el diseño de experimentos para asegurar que no existan diferencias sistemáticas entre los grupos más allá del tratamiento.

Para esto se utiliza el procedimiento estadístico ANOVA, que en concreto permite determinar si las diferencias observadas en las tres medias muestrales son estadísticamente significativas como para rechazar H_0:

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1: No\ todas\ las\ medias\ poblacionales\ son\ iguales$$

Los supuestos necesarios para usar el análisis de varianza son:

- La variable de respuesta en cada población se distribuye normalmente.
- La varianza de la variable de respuesta (σ^2) es la misma en todas las poblaciones.
- Las observaciones deben ser independientes.

Ejercicio 2

¿Cómo se identifican los supuestos en el ejemplo dado?