MÉTODO DE MOMENTOS

Este método de estimación consiste en tomar como estimadores de los momentos de la población a los momentos de la muestra. Se trata de resolver el sistema de equivalencia entre momentos empíricos y teóricos (muéstrales y poblacionales respectivamente). En otras palabras, la idea básica de este método es poder igualar ciertas características muestrales, tales como la media, a los valores esperados de la población correspondiente. Luego resolviendo estas ecuaciones para valores de parámetros desconocidos se obtienen los estimadores.

Los momentos son indicadores genéricos de una distribución. Se basan en una generalización de la idea de media, concretamente los momentos consisten en la media aritmética de la k-ésima potencia de los valores de la variable (o de sus desviaciones respecto a la media).

En este método hay que tener en cuenta lo siguiente:

- Los momentos caracterizan una distribución de probabilidad.
- Si dos variables aleatorias tienen los mismos momentos, entonces dichas variables tienen o siguen la misma función de densidad.

Consideremos una variable aleatoria X, que puede ser discreta con su respectiva función de probabilidad, o bien puede ser continúa con su función de densidad. A la esperanza de X elevada al número de parámetros desconocidos en nuestra función, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{k}})$, se le llama momento de orden k, con k perteneciente a los números naturales [$k \in N$].

Sea $X_1, X_2, X_3 \dots X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n, los primero k momentos de una muestra se definen como:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

y el momento $k - ésimo$ de la población como:

$$E(X^k)$$

Podemos darnos cuenta que el primer momento poblacional corresponde a la media poblacional:

$$E\left(X^k\right) = E(X^1) = \mu$$

por otro lado el primer momento muestral sería:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^1 = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$$

Los segundo momentos vendrían definidos como $E(X^2)$; $\frac{\sum x_i^2}{n}$ respectivamente.

Sea $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ una muestra aleatoria con función de densidad de $f(X; \theta_1; \theta_2; \ldots \theta_m)$ donde $\theta_1; \theta_2; \ldots; \theta_m$ son parámetros Theta cuyos valores son desconocidos. Entonces los estimadores de momento (E.M.) $\hat{\theta}_1; \hat{\theta}_2; \ldots; \hat{\theta}_m$ se obtienen igualando los primeros m momentos muestrales con los primeros m momento de la población correspondientes y resolviendo para $\theta_1; \theta_2; \ldots; \theta_m$.

Por un lado, esta es una de las formas más sencillas de obtener estimadores. Por otro lado, el problema de obtener un estimador de momentos está en el conocimiento previo de su esperanza. Si nos enfrentamos a una variable continua, el conocer su esperanza requerirá un manejo mayor de cálculo integral. Para resumir ambas equivalencias se mostrarán a continuación:

$$E(X^k) = \begin{cases} \sum x^k f_x(x) & \textit{variable aleatoria discreta (sumatoria de } x \textit{ elevado a } k \textit{ por la } fdp) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_x(x)dx & \textit{variable aleatoria continua(integral de } X \textit{ elevado a } k \textit{ por la } fdd \textit{ de } x) \end{cases}$$

Ejemplo

Sea $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ una muestra aleatoria de una distribución exponencial de parámetro λ. En este caso vemos que solamente hay un parámetro a estimar, por lo tanto $k = 1$ y estimamos solamente el primer momento. Sabemos que la función de densidad es:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Y sabemos que la esperanza es: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$$E(X) = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum x_i}$$

Dividiendo por n, el estimador es:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Ejercicio 1

Tenemos una variable aleatoria continua con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \theta x}{2} & , si -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

1. Encontrar el estimador por el método de los momentos.
2. Calcular varianza del estimador.